RECENSIONI
E SCHEDE BIBLIOGRAFICHE

Ennio Peres, *Matematica per comuni mortali*. Milano: Salani, 2017. 160 pp.

Ho letto tanti libri di Ennio e ne ho recensiti otto su varie riviste; e lui ha scritto una prefazione a un mio libro di giochi. Tante volte l'ho invitato a tenere conferenze e seminari nei convegni da me organizzati, la prima volta 32 anni fa. Che dire? Il lettore capirà meglio se scrivo la seguente frase: il più grande giocologo d'Italia non smette mai, ancora oggi, di stupirmi.

Intanto quel divertente titolo: "per comuni mortali" … Chi sarebbero i comuni mortali? Sono coloro che hanno intuito il mondo affascinante che c'è dietro la matematica, la definizione è data nel risguardo della pagina 1 della copertina.

E poi, che cosa contiene questo libro? Le "solite" cose …

Una lunga, piacevole, brillante introduzione sulla matematica vista con gli occhi seri della storia, severi del professore (ex, in questo caso), divertiti del giocologo. E poi sette capitoli, i cui titoli dicono tutto:

1. *Numeri curiosi*, una raccolta di curiosità che non possono che sbalordire gli amanti dei misteri delle cifre, e incuriosire coloro che credono di odiare la matematica.
2. *Pura logica*, una bella raccolta di giochi alla Gardner, con soluzioni a volte inattese; per sicurezza Ennio dà sempre la soluzione, alla fine di ogni capitolo.
3. *Pensiero laterale*, una divertente e profonda raccolta di proposte di indovinelli alla De Bono, per risolvere i quali occorre una bella dose inventiva; molti di questi hanno più soluzioni; per esempio, caro Ennio, quella che dai a pag. 67 per l'esercizio 3.1. proposto a pagina 56, ha un'alternativa fantastica e coerente …
4. *Lampo di genio*, proposte nelle quali serve assai poca matematica (e, quella che serve, estremamente elementare), ma molto acume.
5. *Magia matematica*, trucchi alla portata di tutti, con i quali si possono stupire gli amici durante un'altrimenti noiosa riunione, vera e propria magia (in questo genere di attività, Ennio è sempre stato un maestro di livello mondiale); alcuni di queste magie hanno 700 anni e più, pensa un po' …
6. *Paradossi matematici*, nei quali si mescola l'intuizione, che viene severamente sfidata, la capacità di vedere, alcune nozioni di aritmetica e di geometria che, talvolta, giocano al contrario.
7. *Strategie ottimali*, basato sui principi più elementari della teoria dei giochi, forse il più matematico di tutti, ma anche il più formativo.

Segue una breve bibliografia.

Sei un insegnante di matematica, di non importa qual livello scolastico, dalla scuola primaria all'università?

I tuoi allievi a volte manifestano noia o rifiuto della matematica? Dedica 20 minuti a settimana ai giochi matematici, sorprendi i tuoi studenti, divertili, appassionali; a parte che impareranno più matematica in quei 20 minuti che nel restante tempo, di certo vedranno la matematica con occhi nuovi. Ti chiederanno: "Ma prof, interroga su queste cose? Rientrano nella valutazione?" E tu dirai: "Certo, perché è matematica per davvero, ma la valutazione non sarà fatta sulla base di interrogazioni, creerete voi giochi analoghi e li proporrete a casa e ai compagni e agli amici".

I tuoi allievi sono ghiotti divoratori di matematica, pendono dalle tue labbra quando fai lezione, adorano eseguire esercizi in quantità e si divertono tanto a farli? Premiali, mostra loro questi giochi, queste curiosità, queste ghiottonerie, e lascia che si entusiasmino ancora di più, scoprendo un lato troppo spesso nascosto della nostra meravigliosa disciplina.

In entrambi i casi, ringrazierai poi Ennio, il matemagico.

Bruno D'Amore

Bruno D'Amore y Luis Radford, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de: Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017. 192 pp. http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

Questo libro, disponibile e gratuito sia in versione cartacea sia in versione pdf, si apre con due prefazioni, dotte e profonde, firmate da due illustri personaggi, studiosi e ricercatori di fama internazionale, entrambi presidenti dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), rispettivamente, dal 2007 al 2009, e dal 2013 al 2016: Michèle Artigue (medaglia Félix Klein 2013) e Ferdinando Arzarello (presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica dal 1998 al 2006). Entrambi i prefatori evidenziano le divergenze e le convergenze dei punti di vista dei due autori in didattica della matematica; da una parte, l'importanza che entrambi attribuiscono alla dimensione epistemologica, semiotica e sociologica, alla pratica storica e culturale, alla necessità di rivedere alcuni concetti fondamentali, quali il sapere, la conoscenza e l'apprendimento; dall'altra, le loro diverse esperienze, culture didattiche, convinzioni epistemologiche e semiotiche, che alimentano l'impalcatura logica delle loro riflessioni, discussioni, argomentazioni, analisi didattiche, orientando il loro sguardo sul mondo, sulla cultura, sulle situazioni d'aula, sull'insegnamento e sull'apprendimento.

È il secondo di una serie di volumi destinati ai ricercatori, agli studenti di dottorato, agli studenti universitari, ai docenti universitari, ai docenti di scuola di qualunque livello, che desiderano approfondire alcuni temi di ricerca di grande attualità e rilevanza a livello internazionale in didattica della matematica. Nel primo volume gli autori, Raymond Duval e Adalira Saenz Ludlow, con grande profondità di argomentazioni, avevano affrontato e analizzato i problemi di comprensione nell'apprendimento della matematica da un punto di vista cognitivo e, allo stesso tempo, semiotico. In questo secondo volume, i problemi semiotici, epistemologici e pratici relativi all'insegnamento e all'apprendimento della matematica vengono spiegati, interpretati e affrontati dagli autori, Bruno D'Amore e Luis Radford, anche in chiave sociologica e storico-culturale. Si tratta di questioni e problemi fondamentali per la didattica della matematica che ogni docente si pone e deve in qualche modo affrontare per capire le situazioni d'aula e intervenire efficacemente. Certo, il modo di affrontare certe questioni è sempre relativo al contesto sociale e culturale in cui ci si trova a operare e strettamente legato a ipotesi, assunzioni, obiettivi, conoscenze e convinzioni personali o collettive sui processi di insegnamento e apprendimento della matematica, come affermano gli stessi autori e come si evince dalle loro analisi, condotte con impareggiabile maestria ed estrema perizia, da punti di vista differenti ma complementari e convergenti su obiettivi comuni. Anche dalla premessa:

> È apparsa una necessità di discutere di nuovo di concetti che sono rimasti impliciti nel discorso didattico o che hanno acquisito una certa stabilità concettuale nel corso degli ultimi decenni nel processo di insegnamento e di apprendimento della matematica, come il concetto di sapere, di conoscenza, di rappresentazione e anche il concetto stesso di apprendimento. (p. 25)

Le questioni affrontate sono in effetti tante. Eccone alcune:

Come concepire il sapere? E la conoscenza? Che cos'è un concetto? Come avviene la concettualizzazione in matematica? Come concepire un oggetto matematico? E l'apprendimento? Come avviene l'apprendimento in matematica? Che cosa si intende per interiorizzazione? E per oggettivazione? Come concepire la soggettività? E l'alienazione?

Che struttura ha l'attività matematica? Che cosa si intende per "pratica"? E per "meta-pratica"? Quali tipi di pratiche intervengono nelle attività matematiche? Come affrontare le difficoltà che gli studenti incontrano in tali attività? Con quali strumenti? Come concepire gli ostacoli che si presentano nei processi di insegnamento-apprendimento della matematica? Come interpretare l'errore? Dove si annida il fallimento?

In relazione a tutto questo: Come concepire la formazione universitaria dei docenti di scuola primaria? E quella dei docenti di scuola secondaria? Che cosa dicono le ricerche sulla formazione professionale dei docenti di matematica? E sui corsi di didattica della matematica offerti dalle università e dalle istituzioni scolastiche? A quale tipo di Sapere si fa riferimento nella formazione dei docenti di matematica? Di che tipo è il sapere insegnato? Che cosa si può dire del sapere appreso e del suo uso professionale?

Le risposte a queste ultime domande, che riguardano in modo specifico la didattica della didattica della matematica, si trovano tutte nel secondo capitolo, scritto da Bruno D'Amore e da Martha Isabel Fandiño Pinilla. Tale capitolo fornisce anche alcuni strumenti di base per l'analisi delle situazioni d'aula e per affrontare e sviluppare nei capitoli successivi, anche da altri punti di vista, le questioni sollevate dalle altre domande. Dunque, al lettore che non dispone già di tali strumenti, o che desidera convincersi pienamente, fin da subito, della rilevanza teorica e pratica che ha la didattica della matematica come disciplina scientifica nella formazione professionale dei docenti, consiglio di partire dal secondo capitolo.

Ma torniamo alle prime domande: Come concepire il sapere, la conoscenza, l'apprendimento?

Sulla base di una epistemologia di tipo pragmatista, e degli studi di Yves Chevallard, Juan D. Godino e Carmen Batanero, Bruno D'Amore afferma che il sapere e la conoscenza riflettono, al medesimo tempo, una dimensione sociale, istituzionale, e una dimensione personale, individuale: "Alla 'costruzione' di un 'concetto' partecipano tanto la parte istituzionale, il sapere, quanto la parte personale di chiunque abbia accesso a tale sapere, pertanto non solo lo scienziato" (p. 69). Ma in che modo partecipano?

Anzitutto vi è il *Sapere* (con la *esse* maiuscola), ovvero il risultato di studi, ricerche o di processi storici in un dato contesto culturale (la matematica o la didattica della matematica, nel nostro caso), rappresentato da uno dei vertici del classico triangolo della didattica. Da una opportuna trasposizione didattica del Sapere deriva il *sapere istituzionale* o *da insegnare*, ovvero il sapere riconosciuto e accettato come tale entro una data istituzione (università, scuola, dipartimento ecc.). Sulla base di un'opportuna ingegneria didattica, dal sapere istituzionale o da insegnare si passa al sapere *insegnato*, ovvero a una manifestazione o realizzazione concreta del sapere istituzionale o da insegnare all'interno di un percorso didattico; una *attualizzazione* o *materializzazione* del sapere, nelle parole di Luis Radford. Al sapere insegnato *dovrebbe* poi essere strettamente legato il sapere *acquisito* ovvero: "il prodotto della elaborazione dell'esperienza con la quale entra in contatto il soggetto che apprende; e questa elaborazione consiste nella interazione tra l'individuo e il suo ambiente e nel modo in cui l'individuo interiorizza il mondo esterno" (p. 78). Si tratta di una costruzione nella quale intervengono fattori e variabili non solo personali ma anche sociali e culturali.

Sulla base di un'interpretazione in chiave sociologica delle attività d'aula, l'apprendimento viene anche assunto come "adesione a una pratica sociale condivisa" (p. 179), di varia natura: concettuale, algoritmica o esecutiva, strategica o risolutiva, semiotica, comunicativa, oppure ad esse trasversale, come quando si fa riferimento alla gestione complessiva degli aspetti semiotici specifici del discorso matematico (si veda tutto il primo capitolo).

D'altra parte, in matematica, come afferma Raymond Duval, l'apprendimento concettuale è inseparabile da quello semiotico: "non esiste noetica senza semiotica" (p. 81). Ed è qui che entra in gioco la prospettiva semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica, introdotta da Raymond Duval alla fine degli anni '80. Fortemente condivisa da Bruno D'Amore, essa chiarisce, in modo efficace, la natura dei processi cognitivi sottostanti i fenomeni di comprensione nelle attività matematiche, il ruolo dei segni e delle rappresentazioni in tali attività e la natura stessa delle difficoltà che gli studenti incontrano nei processi di apprendimento della matematica. Tale prospettiva viene qui presentata e rielaborata in modo chiaro, incisivo e originale, anche sulla base dei risultati di recenti ricerche.

Nell'approccio storico-culturale di Luis Radford il sapere, la conoscenza e l'apprendimento sono concepiti in modo fondamentalmente diverso. I fondamenti filosofici di tali concetti e, più in generale, della sua *teoria dell'oggettivazione* si possono trovare, come afferma lui stesso, in alcuni lavori del filosofo tedesco Georg Wilhelm Friedrich Hegel, e nei successivi sviluppi dovuti a Karl Marx e a tutta la tradizione dialettica, Evald Ilyenkov, Boris Mikhailov, Lev Semënovič Vygotskij, per esempio.

Anzitutto, il sapere e la conoscenza non riflettono una dimensione personale separata da una dimensione istituzionale in quanto non derivano dalla pura attività soggettiva dell'individuo. Il sapere non è qualcosa che si costruisce o si trasmette, ma solo "*possibilità*, vale a dire, qualcosa di potenziale che emerge dall'attività umana e si intreccia in un processo di movimento – di *divenire*, per essere precisi – per *materializzarsi* o *esprimersi* in conoscenza" (p. 100). Il sapere è *potenzialità*: "possibilità che hanno gli individui di pensare, riflettere, porre e risolvere problemi in un certo modo" (p. 101), ovvero "un sistema codificato di processi corporei, sensoriali e materiali di azione e di riflessione, costituiti storicamente e culturalmente" (p. 101), che si presentano a noi come pure possibilità.

La conoscenza, anch'essa intesa in senso dinamico come processo (*knowing*), è "l'attualizzazione o la materializzazione del sapere" (p. 107) che si realizza attraverso l'attività "per mezzo di artefatti, forme d'uso di artefatti, ma anche per mezzo di forme e modi dell'interazione umana, che sono storici e culturali" (p. 109). Tuttavia, in quanto pura possibilità, "il sapere non può identificarsi con alcuna delle sue materializzazioni o attualizzazioni" (p. 108), dunque con la conoscenza, essendo questa soltanto "un modo di sapere: una delle sue forme *singolari* sviluppate" (p. 109). Di conseguenza, il sapere si presenta come "una sequenza di azioni codificate storicamente e culturalmente che si materializzano continuamente nella pratica sociale" (p. 117).

In questa prospettiva, come afferma Luis Radford, "l'apprendimento è l'incontro con il sapere e la sua trasformazione soggettiva in qualcosa che appare alla coscienza. Questa trasformazione è ciò che io chiamo *oggettivazione*" (p. 120). L'apprendimento è dunque concepito in termini di *processi di oggettivazione*, ovvero di "processi sociali attraverso i quali si diventa progressivamente e criticamente consapevoli di una forma codificata di pensiero e di azione – qualcosa che notiamo gradualmente e che al medesimo tempo acquista significato" (p. 121). In tali processi, si nota o si percepisce che qualcosa, il sapere culturale, "in sé", si converte in qualcosa, in sapere, "per sé", trasformando anche la coscienza.

La teoria dell'oggettivazione si colloca all'interno di un progetto educativo nel quale, come afferma Luis Radford, "non si considera l'apprendimento come apprendimento di un determinato contenuto concettuale" (p. 160) e neppure "come qualcosa che deve derivare dallo studente" (p. 140). E questo perché: "Per la teoria dell'oggettivazione, l'apprendimento non si riferisce solo al conoscere, ma anche al divenire" (p. 121). Dunque, l'apprendimento è concepito non solo in termini di processi di oggettivazione, ovvero di processi che riguardano la conoscenza, ma anche in termini di *processi di soggettivazione*, ovvero di "processi di creazione di un sé particolare (e unico)" (p. 122). Inoltre:

> Nella teoria dell'oggettivazione la relazione docente-studente è inquadrata dall'idea di attività o *lavoro comune* ed è di natura etica. (...) La relazione etica che la teoria dell'oggettivazione fornisce, elimina la separazione tra docente e studente che la teoria delle situazioni didattiche si sforza di mantenere" (p. 140).

Agli ostacoli di tipo epistemologico, ma non solo, è dedicato il capitolo in omaggio a Giorgio Bagni (1958 – 2009), l'ultimo. In esso viene riportata una interessante conversazione, che risale al 2006, nella quale Bruno D'Amore e Luis Radford rispondono ad alcune domande poste da Giorgio Bagni su temi molto dibattuti in didattica della matematica. I temi riguardano non solo la questione degli ostacoli epistemologici, ma anche la cultura, la storia, il sapere, la conoscenza, l'apprendimento, il linguaggio, la formazione del docente e tanto altro. Le risposte dei due autori risultano ancora basate su scelte epistemologiche differenti, ma complementari e convergenti su temi di interesse comune.

Per esempio, per quanto riguarda l'idea di ostacolo epistemologico, della presentazione classica di Brousseau, Bruno D'Amore afferma di condividere con convinzione e far proprio "il suo essere espressione di conoscenza e non di mancanza di conoscenza" (p. 172), in quanto: "L'ostacolo epistemologico risulta fortemente legato non solo a fattori concettuali ma anche a fattori sociali, nei quali la storia 'pura' della matematica entra in contatto con le storie delle pratiche umane" (pp. 171–172). Luis Radford, invece, afferma di non condividere neppure il significato di *ostacolo* per la sua presunta natura non-culturale:

> Se con il termine ostacolo epistemologico ci riferiamo a un tipo di conoscenza parziale (per esempio, una conoscenza collocata da qualche parte nel percorso dello sviluppo concettuale che serve per risolvere certi problemi ma che inizia a

> essere causa di errori non appena essa viene applicata al di fuori di essi), la questione fondamentale per me riguarda la spiegazione della *natura* del cammino che si suppone essere percorso da tutti noi durante lo sviluppo concettuale, a prescindere dal nostro contesto temporale e culturale. Proprio in quanto la sua natura viene ritenuta essere al di là della cultura e del tempo, tale percorso sembra essere un percorso *universale* di sviluppo concettuale. Ora, dato che per me la cultura e la conoscenza hanno la stessa sostanza, considero la precedente concezione di ostacolo troppo ambiziosa. (pp. 183–184)

Le risposte dei due autori risultano pertanto diverse ma convergenti.

Nelle pagine di questo prezioso volume sono fornite le risposte a tante altre domande e questioni, sulla base degli studi, delle esperienze dirette e dei lavori di ricerca che hanno reso famosi i due autori a livello internazionale. Risposte così profonde e interessanti che non possono non far riflettere, non coinvolgere, non stimolare il lettore.

Al lettore, al docente, al ricercatore la scelta della prospettiva o teoria che fornisce gli strumenti più adatti, utili ed efficaci per capire, studiare, gestire e valutare ciò che accade nella propria aula, o nel contesto specifico in cui si trova ad operare.

Maura Iori

Piergiorgio Odifreddi, *Dalla terra alle lune: Un viaggio cosmico in compagnia di Plutarco, Keplero e Huygens*. Milano: Rizzoli, 2017. 336 pp.

Nel 2011 uscì un film di Martin Scorzese, *Hugo Cabret*, un vero capolavoro, che fruttò al regista statunitense il premio come miglior regista al *Golden Globe* 2012 e 5 statuette Oscar su 11 nomination ai *Premi Oscar* 2012. Il protagonista è un dodicenne orfano che vive in una stazione ferroviaria a Parigi, nascosto a tutti, che revisiona gli orologi e ruba quotidianamente quel poco che gli serve per vivere. Hugo ha un profondo legame con un robot rotto che gli ha lasciato il padre e che domina tutta la storia del film, automa che egli deve/vuole riparare ad ogni costo. Realmente il costruttore del robot è l'anziano Georges Méliès, interpretato da un superbo Ben Kingsley, proprietario-gestore di un chiosco di giocattoli nella stessa stazione. Parte del film è appunto dedicata alla rivalutazione di Méliès sia da parte delle autorità, sia della critica cinematografica che, all'inizio della sua carriera, l'aveva stroncato e che ora, finalmente, riconosce la sua genialità.

Come, lettore, non ti ricordi il nome di Georges Méliès? Perbacco, è l'autore del film muto *Viaggio nella Luna* del 1902, il primo (vero) film di fantascienza del mondo, ispirato a *Dalla Terra alla Luna* e *Intorno alla Luna* di Jules Verne, del 1865 e 1870, e al romanzo di Hebert George Wells *I primi uomini sulla Luna* del 1901.

Non ti viene ancora in mente? Lo conosci di sicuro, almeno una scena iniziale del suo film è stata vista da tutti: il razzo lanciato dalla Terra si va a infilare nell'occhio destro del faccione umano che rappresenta la Luna, una scena che è parte integrante della storia del cinema.

Un altro grande omaggio alla produzione cinematografica di Méliès è stata fatta dal regista italiano Maurizio Michetti nel film *Domani si balla* (1983) (con Mariangela Melato e Paolo Stoppa) nel quale esseri extraterrestri che ricordano in tutto e per tutto i personaggi di Méliès svaniscono in una nuvola di fumo, uccisi dal suono delle parole che giungono loro dalla Terra, inviate da una stazione televisiva.

Se sei un appassionato della serie *I Simpson*, ricorderai forse il film numero 21 della ventunesima stagione, nel quale si propone una parodia del film. (C'è più matematica nei Simpson che in un testo di algebra per i licei…). Ma allora ti piace forse anche la serie *Futurama*; nella prima stagione, nel secondo film, il robot alcolista Bender infila una bottiglia nell'occhio sinistro del faccione di un funzionario travestito da Luna, evidente riferimento a Méliès.

Che cosa c'entra tutto ciò con il libro di Odifreddi? È che quando leggo qualcosa che mi entusiasma, non so trattenermi e comincio a tessere ragnatele che uniscono mondi. E, certo, questa è stata per me una delle letture più entusiasmanti degli ultimi anni.

Il gigante Plutarco ha scritto, circa nell'anno 70, dunque giovanissimo, il famoso (ma non abbastanza) testo *Il volto della Luna* dal quale, a parte ingenuità che generosamente Odifreddi definisce "giovanili", possiamo ancora attingere molte informazioni sulla cultura greca. Chi ha letto questo dialogo e, più in generale, l'opera di Plutarco? Di certo Copernico, Kepler, Galileo e Newton, alcuni dei quali si lasciano andare a plagi, come Galileo nel *Sidereus Nuncius* del 1610. E poi Shakespeare che ne usa interi brani e la descrizione di alcuni personaggi; l'Alfieri, ghiotto di notizie sui vari studi dell'antichità; Jean-Jacques Rousseau che esalta Plutarco più volte nei suoi scritti; Michel de Montaigne che usa pedissequamente le notizie elargite dallo stesso Plutarco.

Si tratta del più prolifico scrittore greco, appassionato di mitologia, filosofia e scienza, prima dimenticato e poi celebrato con l'avvento dell'Umanesimo e del Rinascimento; la sua opera più famosa è di certo quel *Vite parallele* che è a dir poco geniale; meno conosciuta, dunque, l'opera citata all'inizio, *Il volto della Luna*, alla quale si devono, come scrive Odifreddi "molte informazioni su ciò che i Greci sapevano di meccanica, di ottica e di astronomia: un sapere che andò perduto nel buio dei secoli cristiani, ma che poté essere in seguito ritrovato e rinnovato alla luce dei secoli illuministi" (p. 27).

Nel 1593 un altro giovanotto interessato alle scienze, Johannes Kepler, decide di scrivere un saggio, *Astronomia lunare*, nel quale cerca di rispondere alla seguente domanda: se fossimo sulla superficie lunare, come si vedrebbe il cosmo? E la Terra in particolare? Ma, preso da altre incombenze, non portò a termine questa impresa. Scrisse e pubblicò le sue opere immortali, ben note. Ma, giunto ad una certa età, come suol dirsi per le personnes agées, riprese in mano quel sogno giovanile che, appunto, intitolò *Sogno* (*Somnium*), che però uscì a stampa postumo (1634), a cura del figlio Ludovico. Come ricorda anche Odifreddi, Jorge Luis Borges lo considera il primo vero romanzo di fantascienza. Ma la stessa cosa hanno sostenuto altri autori, tra i quali il più esperto in questo campo, Isaac Asimov. Il protagonista è un ragazzo islandese che ha una madre strega e che viene informato da un demonio dell'esistenza di un'isola (Levania, la Luna); egli allora immagina, come in un sogno, appunto, come si possa vedere la Terra da quell'isola e, più in generale, l'intero firmamento. Lo scopo è divulgativo, affermare e difendere il sistema eliocentrico copernicano.

Nel 1698, già anziano, Christian Huygens pubblica *L'osservatore cosmico*, opera nella quale, facendo esplicito riferimento all'opera di Kepler, si pone lo stesso problema, ma con aspirazioni ancora più vaste; sempre stando sulla Luna, guardare e descrivere la sfera celeste. E poi fare lo stesso con gli altri pianeti del sistema solare. Egli aveva scoperto nel 1655 (a 26 anni) un satellite di Saturno e dunque la sua visione cosmogonica era assai più vasta e completa.

Torniamo al libro di Odifreddi. Che cosa ha pensato di fare il nostro autore? Lo scrive lui stesso: "Ho dunque messo insieme *Il volto della Luna*, il *Sogno* e *L'Osservatore cosmico* come se fossero tre capitoli di un'unica opera collettiva a sei mani. O, parafrasando *Il sogno di Coleridge* di Borges, un archetipo non ancora rivelato agli uomini, un oggetto eterno che sta entrando gradatamente nel mondo: la sua prima manifestazione fu il dialogo di Plutarco, la seconda il racconto di Keplero, la terza il saggio di Huygens" (p. 9).

Un vero e proprio colpo non a sorpresa, che sarebbe troppo, ma certamente adatto ad ammaliare qualsiasi lettore colto e amante delle cose di scienza. Con un risultato che suscita stupore in chi diligentemente legge, lasciandosi dirigere da chi è in grado di ideare simili viaggi culturali.

Questo libro va letto fino in fondo come fosse un romanzo d'avventura, anche perché le ultime pagine riservano al lettore curioso e attento tante sorprese ghiotte.

E adesso, una raccomandazione. Vista la natura di questa rivista è pressoché certo che il lettore di queste righe sia un insegnante di matematica. Ai nostri allievi è sempre meno concesso leggere, perché tutto il mondo che ruota attorno e a volte le nostre stesse indicazioni non vanno in questa direzione. Questo è un libro per professori, non per studenti, ma cela in sé mille preziose e puntuali questioni che un bravo studente curioso può gustare; sarebbe opportuno non sottrargliele.

Bruno D'Amore

Raymond Duval, *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations.* Foreword by Bruno D'Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG. XXIV+117 pp. doi:10.1007/978-3-319-56910-9

È uscito in versione cartacea e in versione web l'ultimo libro di Raymond Duval, senza alcun dubbio il più conosciuto e stimato studioso di semiotica nell'ambito della didattica della matematica. In questo testo, l'autore sviluppa e approfondisce alcune delle sue tematiche più note e caratteristiche, dando un forte impulso alle sue ricerche teoriche e pratiche.

Foreword (in English)

Si può leggere al seguente indirizzo: https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2017/08/916-D-A-Prefaz-a-Duval-Springer-in-inglese.pdf

Prefazione (in italiano)

Dopo essersi dedicato alle problematiche dell'apprendimento del concetto di infinito in matematica e alla distinzione fra dimostrazione e argomentazione, Raymond Duval sorprese tutti i ricercatori di didattica della matematica con una successione fitta di studi sull'importanza decisiva della semiotica nell'attività di apprendimento dei concetti della matematica. Erano i primi anni '90 (Duval, 1993).

Da tempo ci conoscevamo ma ci si frequentava solo in modo episodico; ci confrontammo durante uno studio ICMI a Catania nel 1995 sull'apprendimento della geometria; e ancora nel luglio del 1996 a Siviglia, durante l'ICME 8, quando mi venne affiancato proprio Raymond come collaboratore nel Topic Group da me diretto (come Chief Organizer) sull'apprendimento dell'infinito: *Infinite processes throughout the curriculum*. Ma oramai il suo mondo di ricerca era diventata la semiotica (Duval, 1995).

Il suo modo di affrontarla, pur facendo riferimento alle basi concettuali di Frege, De Saussure e Peirce, è decisamente rivoluzionario. Il senso che dà alla sua ricerca è strettamente legato all'apprendimento della matematica, tanto che ha coniato il motto diventato simbolo mondiale: *Non c'è noetica senza semiotica*, che è stato sulla bocca di tutti noi, una delle frasi più citate nel nostro mondo di ricerca.

Un altro contributo universale è stata l'idea di "paradosso cognitivo dell'apprendimento", nel quale si afferma che è paradossale il fatto che l'allievo apprenda – costruisca un oggetto matematico O avendo a disposizione solo rappresentazioni semiotiche di O e non la conoscenza di O, dato che non c'è altro modo, da parte del docente, di mostrare O. Si tratta di una posizione che ha alle spalle migliaia di anni di antecedenti, per esempio questo fantastico di Agostino di Tagaste:

> Cum enim mihi signum datur, si nescientem me invenit cuius rei signum sit, docere me nihil potest: si vero scientem, quid disco per signum? [Quando infatti mi è dato un segno, se mi trova nella non conoscenza della cosa di cui è segno, non mi può insegnare nulla, ma se la so già, allora che cosa imparo mediante il segno?]. (Agostino, *De Magistro*, 10, 115).

In un recente lavoro (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2015), abbiamo messo in evidenza proprio come questa idea geniale di Raymond sia il risultato in itinere di posizioni filosofico-semiotiche che hanno inizio nell'antica Grecia: glielo comunicai anche di persona durante un convegno internazionale a Santa Marta e ne fu colpito (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015).

Durante le mie visite a Lille, dove abita, Raymond è sempre stato prodigo di insegnamenti a tutto campo; tanto che ora so per certo che le sue opere principali non rispecchiano, a mio avviso, che una minima parte del suo sapere reale. Lui sa dosare benissimo i saperi da distribuire, occasione per occasione: seminario di ricerca, confronto con dottorandi, corso per master, incontri con insegnanti, colloqui con studenti, …; chi lo conosce e lo ascolta in questi casi, si rende conto del fatto che la trasposizione didattica vale in ogni livello di studio ed è davvero un tema appassionante generale.

Credo di aver capito a fondo il dissidio fra Vygotskij e Piaget solo grazie alle sue spiegazioni, un giorno, a Lille, in casa sua, tentando maldestramente di preparare un pranzo, pur avendo studiato su questo argomento tutto quel che è stato scritto in decenni; e la posizione reale di De Saussure, nonostante avessi letto le sue opere direttamente in francese.

Lui cita spesso, e lo fa anche in questo libro alle pagine 43 e 44, l'artista statunitense Joseph Kosuth, famoso per essere uno dei primi artisti della cosiddetta "linea analitica" (D'Amore, 2015a); fra le tante opere, Kosuth è famoso per "Una e tre sedie", realizzata a partire dal 1966 in tante versioni e che ora si trova nei maggiori musei del mondo. In tale opera egli espone una sedia reale di materiali vari, una sua foto e una definizione di sedia tratta dal vocabolario. Si tratta di un lavoro di grande importanza nel mondo della storia dell'arte, interessante sul piano della semiotica. Mi piace comunicare a Raymond da queste righe che anche l'artista francese Bernar Venet, nello stesso 1966, aveva esposto un'opera dal titolo "Tubo", che ha alla base la stessa identica idea: l'oggetto (un tubo) e una sua rappresentazione assonometrica (D'Amore, 2015b). Come a dire: questo tipo di operazione era già nell'aria. Ma io credo che, per uno studio dell'importanza della semiotica nell'arte contemporanea bisogna partire dal belga René Magritte (D'Amore, 2010).

In questo libro, semplice e breve, ma assai profondo, dotto e concreto, Raymond esplora il suo mondo semiotico da gigante, da par suo.

Si propone di studiare le relazioni fra rappresentazione e conoscenza, grazie a una rivoluzione all'interno della semiotica già da tempo in atto (Duval, 2006), sulla base di questi temi: (1) il ruolo della rappresentazione nella conoscenza di un oggetto, in generale, e di un oggetto matematico, in particolare (Duval, 2009a); (2) la differenza, anche da un punto di vista cognitivo, fra segno e rappresentazione (Duval, 2009b).

La semiotica è presentata come un nuovo schema di analisi della conoscenza. Per arrivare a ciò deve discutere in profondità i tre modelli fondamentali dell'analisi dei segni, ciascuno con i suoi contributi e con i suoi limiti; quello di De Saussure (analisi strutturale dei sistemi semiotici); quello di Peirce (classificazione dei diversi tipi di rappresentazione), e quello di Frege (il processo semiotico che produce nuove conoscenze). (Si vedano i tre articoli di Raymond Duval in: Duval & Sáenz-Ludlow, 2016, e i miei commenti specifici nello stesso testo).

Un problema centrale riguarda la relazione fra le attività matematiche e le trasformazioni semiotiche. Nel processo di accesso agli oggetti matematici si evidenziano due situazioni epistemologiche, irriducibili l'una all'altra. E si usa un test (detto di opposizione) con un oggetto materiale: come riconoscere uno stesso oggetto in diverse rappresentazioni, come si crea la corrispondenza tra oggetti o tra rappresentazioni.

Le trasformazioni di rappresentazioni semiotiche sono poste da Raymond al cuore del lavoro matematico. E qui l'autore si abbandona a esempi convincenti, di grande forza epistemologica e didattica, già pubblicati altrove, sulle figure geometriche e sui numeri naturali (Duval, 2012; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016). Da queste riflessioni, conclude che è necessaria un'analisi cognitiva dell'attività matematica e del funzionamento del pensiero in matematica.

Passiamo poi ai registri di rappresentazione semiotica e all'analisi del funzionamento cognitivo del pensiero in matematica; importante è la differenza fra codici e registri, l'analisi dei tipi di operazioni discorsive e delle funzioni cognitive delle lingue naturali, le relazioni fra pensiero e linguaggio, e che cosa caratterizza un registro di rappresentazione semiotica.

Si passa di seguito all'analisi di uno dei capisaldi della ricerca in didattica della matematica, la visualizzazione. Ma come vediamo una figura? Come vediamo le trasformazioni di una figura? Come funziona tutto ciò nella didattica della geometria? Gli esempi qui forniti sono portentosi e preziosi.

Un capitolo intero è dedicato ai registri. Qui rientrano considerazioni sulle unità di senso in matematica relative al contenuto di una rappresentazione; come variano le attività matematiche in funzione dei registri messi in atto; variazioni funzionali delle modalità fenomenologiche di produzione in relazione ai registri; come compiere analisi significative e utili delle attività di aula.

La potenza di questa opera, come di altre dello stesso autore, è che la relazione fra studi, all'apparenza solo teorici, e la vita di classe è totale. Egli ha molto frequentato le aule; ho letto parecchi suoi resoconti di attività svolte con studenti. Gli apparenti voli teorici che a volte sembrano dimenticare il concreto dell'aula per arrivare a vette altissime un po' astruse, sono invece sempre occasioni per riconquistare spazi vissuti dove l'interesse è concreto, vicino all'allievo e all'insegnante.

E senza limiti di età, perché alcune considerazioni possono perfino essere adatte a bambini dei primi gradi di scolarità, mentre altre sembrano non avere riferimenti a età. Anzi, mi sono sempre sorpreso a pensare alla formidabile analisi epistemologica del suo lavoro, che tratta l'aula come un ambiente sperimentale di costruzione degli oggetti matematici.

Il suo modo assai personale di vedere, nel senso proprio specifico di "vedere", le figure è un contributo notevole alla ricerca epistemologica in matematica; me lo confermano altri suoi studi (Duval, 2016).

E il suo sconfinamento nel mondo dell'arte non può che impressionarmi, visto che fornisce allo studioso due campi semiotici, l'artistico e il matematico, ritenuti non interscambiabili nel senso comune.

Lo studio attento di questo breve libro non potrà che portare beneficio a chi compie ricerca nel campo della didattica della matematica, ma anche a chi lavora quotidianamente nel mondo della scuola e vuole eliminare il divario fra l'oggetto matematico che si pretende di far costruire cognitivamente e quello che, nella realtà, lo studente costruisce, come fosse un problema sì epistemologico, ma anche di didattica concreta.

Lo stesso Raymond suggerisce quattro modalità diverse di lettura di questo libro: una lettura lineare, la più banale e diffusa, dall'inizio alla fine; una lettura trasversale sinottica per temi ricorrenti; una lettura pratica, cercando i temi e i suggerimenti didattici espliciti; una lettura come se si trattasse di un cartone animato o di un libro per bambini, guardando solo le figure del libro e seguendole nel loro iter e nella loro evoluzione. Io ho personalmente seguito la prima modalità e, avendo la fortuna di conoscere questi temi, ho molto apprezzato la struttura e la scelta di essi. E poi ho provato a seguire le figure, come farebbe un bambino; devo ammettere che una certa qual dose di coraggio ci vuole, ma è indubbiamente una modalità interessante di lettura.

Al lettore, ora, la scelta.

Riferimenti bibliografici

D'Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. In V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D'Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts: Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

D'Amore, B. (2015a). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità fra due mondi possibili*. Bari (Italia): Dedalo.

D'Amore, B. (2015b). Bernar Venet: Elogio del processo razionale. *Nuova Meta*, 37, 2–13. Disponibile da www.rivistaartenuovameta.it

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Eds.). (2015). *Didáctica de la matemática: Una mirada epistemológica y empírica.* [Autori: Guy Brousseau, John Alexander Alba, Luis Carlos Arboleda, Ferdinando Arzarello, Giorgio Bolondi, Ricardo Cantoral, Bruno D'Amore, Raymond Duval, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Vicenç Font, Athanasios Gagatsis, Juan Diaz Godino, Salvador Llinares]. Atti del convegno internazionale omonimo, settembre 2015. Chia (Colombia): Ediciones Universidad de La Sabana.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177–212. doi:10.12802/relime.13.1822. http://www.clame.org.mx/relime.htm

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, *5* (1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna (Svizzera): Peter Lang.

Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 6*(1), 139–163.

Duval, R. (1998b). Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 6*(1), 165–196.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 45–81. Disponibile da http://www.clame.org.mx/relime.htm

Duval, R. (2009a). «Objet»: Un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). Grenoble (Francia): PUG.

Duval, R. (2009b). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia: Revista de educação em ciências e matemáticas, 6*(11–12), 126 –143.

Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques? *Práxis educativa, 7*(2), 305–330. doi:10.5212/PraxEduc.v.7i2.0001

Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences. In M. Iori (Ed.), *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore.* Proceedings of International Conference, October 8, 2016 (pp. 213–220). Department of Mathematics, University of Bologna. Preface by Bruno D'Amore. Bologna (Italia): Pitagora. ISBN: 88-371-1927-5. Disponibile gratuitamente su: http://www.dm.unibo.it/rsddm, http://www.incontriconlamatematica.org, http://www.incontriconlamatematica.net.

Duval, R., & Saenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. [Premessa di Bruno D'Amore. Commenti agli articoli di Bruno D'Amore e di Carlos Eduardo Vasco Uribe]. Bogotá (Colombia): Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Prefacio (en español)

Después de haber dedicado su tiempo al estudio de las problemáticas del aprendizaje del concepto de infinito en matemática y a la distinción entre demostración y argumentación, Raymond Duval sorprendió al mundo de la investigación en didáctica de la matemática con una densa sucesión de estudios sobre la decisiva importancia de la semiótica en la actividad de aprendizaje de los conceptos matemáticos. Eran los primeros años de la década de los noventa (Duval, 1993).

Nos conocíamos desde hacía bastante tiempo, pero nuestros encuentros eran esporádicos; nos encontramos durante un estudio ICMI en Catania en 1995 sobre el aprendizaje de la geometría; y meses después en julio de 1996 en Sevilla, durante el congreso del ICME 8, cuando se me asignó precisamente a Raymond Duval como colaborador en el Topic Group dirigido por mi (como Chief Organizer) sobre el aprendizaje del infinito: *Infinite processes throughout the curriculum*.

Pero ya para ese entonces su campo de investigación había girado hacia la semiótica (Duval, 1995).

Su forma de afrontarla, aún haciendo referencia a las bases conceptuales de Frege, De Saussure y de Peirce, es decididamente revolucionario; el sentido que da a su investigación está estrictamente relacionado con el aprendizaje de la matemática; tanto que ha acuñado la sentencia hoy mundialmente reconocida: *No existe noética sin semiótica*, que ha sido pronunciada por todos nosotros, una de las frases mayormente citadas en nuestro mundo de investigación.

Otra contribución universal fue la idea de "paradoja cognitiva del aprendizaje", en la cual se afirma que es paradójico el hecho que el alumno aprenda – construya un objeto matemático O teniendo a disposición sólo representaciones semióticas de O y no el conocimiento de O, dado que el docente no tiene otra forma de mostrar O. Se trata de una posición que tiene a la espalda miles de años de antecedentes, por ejemplo, este fantástico de Agustín de Tagaste:

> Cum enim mihi signum datur, si nescientem me invenit cuius rei signum sit, docere me nihil potest: si vero scientem, quid disco per signum? [Cuando, de hecho, me han dado un signo, si me encuentro en que no tengo conocimiento de la cosa de la cual es signo, no puede enseñarme nada; pero, si ya lo conozco, entonces ¿qué estoy aprendiendo mediante el signo?] (Agustín, *De Magistro*, 10, 115).

En un trabajo reciente (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori & Matteuzzi, 2015), evidenciamos precisamente cómo esta genial idea de Raymond es el resultado de un itinerario de posiciones filosófico-semióticas que tuvieron inicio en la antigua Grecia; este hecho se lo comuniqué personalmente durante un congreso internacional en Santa Marta y Raymond manifestó gran interés por este análisis.

Durante mis visitas a Lille, donde vive, Raymond fue siempre generoso de enseñanzas sobre cualquier tema que abordábamos; tanto que ahora puedo decir con certeza que sus principales obras no reflejan, en mi opinión, sino una mínima parte de su saber real. Él sabe dosificar muy bien los saberes que desea comunicar, en cada ocasión: seminarios de investigación, confrontaciones con doctorandos, cursos de maestría, encuentros con docentes, coloquios con estudiantes, …; quien lo conoce y lo escucha en estos casos, se da cuenta del hecho que la transposición didáctica es válida en todo nivel escolar y es en verdad un apasionante tema.

Creo haber entendido definitivamente las discrepancias entre Vygotsky y Piaget sólo gracias a sus explicaciones, un día, en Lille, en su casa, intentando sin mucho éxito de preparar un almuerzo, aunque haya estudiado sobre este antagonismo todo lo que se ha escrito en decenios, así como sobre la posición real de De Saussure, a pesar de haber leído sus obras directamente en francés.

Duval cita con frecuencia, y lo hace también en este libro en las páginas 43 y 44, al artista estadounidense Joseph Kosuth, famoso por ser uno de los primeros artistas de la llamada “línea analítica” (D’Amore, 2015a); entre sus múltiples obras, Kosuth es famoso por “Una y tres sillas”, realizadas a partir de 1966 en varias versiones, y que actualmente se encuentra en los mejores museos del mundo. En dicha obra el artista expone una silla real hecha con diversos materiales, una fotografía de dicha silla y una definición de la palabra “silla” tomada de un diccionario.

Se trata de un trabajo de gran importancia en el mundo de la historia del arte, que también es interesante en el plano de la semiótica. Me da gusto comunicar a Raymond en estas líneas que también el artista francés Bernar Venet, en el mismo año 1996, expuso una obra con el título “Tubo”, que tiene como base la misma idea: el objeto (un tubo) y una representación axonometría (D’Amore, 2015b).

Como se suele decir, este tipo de operaciones estaban ya en el aire. Pero pienso que, para un estudio de la importancia de la semiótica en el arte, es necesario partir del belga René Magritte (D’Amore, 2010).

En este libro, simple y breve, pero sin lugar a dudas profundo, docto y concreto, Raymond explora su mundo semiótico como un gigante, como sólo él puede hacer.

Nos propone estudiar las relaciones entre la representación y el conocimiento gracias a una revolución en el interior de la semiótica, estudio iniciado hace tiempo (Duval, 2006) y basado en los temas: 1) el papel de la representación en el conocimiento de un objeto, en general, y de un objeto matemático, en particular (Duval, 2009a); 2) la diferencia que se presenta, incluso desde el punto de vista cognitivo, entre signo y representación (Duval, 2009b).

La semiótica se presenta como un nuevo esquema de análisis del conocimiento. Para llegar a esto, debe discutir en profundidad los tres modelos fundamentales del análisis de los signos, cada uno con sus contribuciones y con sus límites; el de De Saussure (análisis estructural de los sistemas semióticos); el de Peirce (clasificación de los diversos tipos de representación); el de Frege (el proceso semiótico que produce nuevos conocimientos). (Véanse los tres artículos de Raymond Duval en Duval & Sáenz-Ludlow, 2016, y mis comentarios específicos en el mismo texto).

Un problema central tiene que ver con la relación entre actividades matemáticas y las transformaciones semióticas. En el proceso de acceso a los objetos matemáticos se evidencian dos situaciones epistemológicas, irreducibles la una a la otra. Y se usa un test (llamado de oposición) con un objeto material: cómo reconocer un mismo objeto en diversas representaciones, cómo se crea la correspondencia entre objetos o entre representaciones.

Las transformaciones entre representaciones semióticas son puestas por Raymond en el centro del trabajo matemático; y aquí el autor se deja llevar por ejemplos convincentes, de gran fuerza epistemológica y didáctica, ya publicados en otros textos, sobre las figuras geométricas y sobre los números naturales (Duval, 2012; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016). De estas reflexiones, concluye que es necesario un análisis cognitivo de la actividad matemática y del funcionamiento del pensamiento en matemática.

Se aborda también el estudio de los registros de representación semiótica y al análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento en matemática; importante es la diferencia entre códigos y registros; el análisis de los tipos de operaciones discursivas y funciones cognitivas de las lenguas naturales; relaciones entre pensamiento y lenguaje; la caracterización de un registro de representación semiótica.

Se pasa a continuación a un análisis de uno de los baluartes de la investigación en didáctica de la matemática, la visualización. Pero ¿Cómo vemos una figura? ¿Cómo vemos las transformaciones de una figura? ¿Cómo funciona todo esto en la didáctica de la geometría? Los ejemplos que aquí se presentan son portentosos y preciosos.

Un capítulo completo está dedicado a los registros. Aquí se encuentran consideraciones sobre la unidad de sentido en matemática relativas al contenido de una representación; cómo varían las actividades matemáticas en función de los registros que se ponen en juego; variaciones funcionales de las modalidades fenomenológicas de producción en relación a los registros; cómo lograr análisis significativos y útiles de las actividades de aula.

La potencia de esta obra, como de otras de Raymond Duval, está en que la relación entre estudios, en apariencia sólo teóricos, y la vida de la clase es total; él ha frecuentado muchas aulas, he leído sus narraciones de las actividades desarrolladas con estudiantes; los aparentes vuelos teóricos que en ocasiones parecen olvidar la actividad concreta en el aula para alcanzar los picos más altos y un poco abstrusos, son por el contrario siempre ocasiones para reconquistar espacios vividos donde los intereses son concretos, cercanos al estudiante y al docente.

Y sin límites de edad, porque algunas consideraciones pueden incluso ser apropiadas para niños de los primeros grados de escolaridad, mientras que otras parecen no tener ninguna referencia a la edad; es más, siempre me sorprende pensar en el formidable análisis epistemológico de su trabajo, que trata el aula como un ambiente experimental de construcción de los objetos matemáticos.

Su forma muy personal de ver, en el sentido específico de "ver", las figuras es una contribución notable a la investigación epistemológica en matemática; encuentro confirmación en otros de sus estudios (Duval, 2016).

El paso dado hacia el mundo del arte sólo puede impresionarme, dado que proporciona al estudioso dos campos semióticos, el artístico y el matemático, considerados para nada intercambiables según el sentido común.

El estudio atento de este breve libro portará, sin duda alguna, beneficios a quien realiza investigaciones en el campo de la didáctica de la matemática, como también a quien trabaja cotidianamente en el mundo de la escuela y desea eliminar la brecha entre el objeto matemático que se pretende ayudar a construir cognitivamente y aquel que, en la realidad, el estudiante construye, como si fuera un problema efectivamente epistemológico, pero también de didáctica concreta.

El mismo Raymond Duval sugiere cuatro modalidades diferentes de lectura de este libro: una lectura lineal, la más banal y difusa, de inicio a fin; una lectura transversal sinóptica por temas recurrentes; una lectura práctica, buscando los temas y las sugerencias didácticas explícitas; una lectura como si se tratara de un dibujo animado o de un libro para niños, mirando sólo las figuras y siguiéndolas en su itinerario y en su evolución. Yo personalmente seguí la primera modalidad y, teniendo la fortuna de conocer en detalle estos temas, aprecié la estructura y la elección de estos. Y después intenté seguir las figuras, como haría un niño; debo admitir que una cierta dosis de coraje es necesaria, pero es indudablemente una modalidad interesante de lectura.

Al lector, ahora, corresponde la elección.

Referencias bibliográficas

D'Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. En V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D'Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts. Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

D'Amore, B. (2015a). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità fra due mondi possibili*. Bari (Italia): Dedalo.

D'Amore, B. (2015b). Bernar Venet: Elogio del processo razionale. *Nuova Meta*, 37, 2–13. Recuperado de www.rivistaartenuovameta.it

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Eds.). (2015). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica.* [Autores: Guy Brousseau, John

Alexander Alba, Luis Carlos Arboleda, Ferdinando Arzarello, Giorgio Bolondi, Ricardo Cantoral, Bruno D'Amore, Raymond Duval, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Vicenç Font, Athanasios Gagatsis, Juan Díaz Godino, Salvador Llinares]. Actas del congreso internacional homónimo, septiembre 2015. Chía (Colombia): Ediciones Universidad de La Sabana.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177–212. doi:10.12802/relime.13.1822. http://www.clame.org.mx/relime.htm

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna (Suiza): Peter Lang.

Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 6*(1), 139–163.

Duval, R. (1998b). Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 6*(1), 165–196.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 45–81. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Duval, R. (2009a). «Objet»: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? En J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). Grenoble (Francia): PUG.

Duval, R. (2009b). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia Revista de educação em ciências e matemáticas, 6*(11–12), 126–143.

Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques? *Práxis educativa, 7*(2), 305–330. doi:10.5212/PraxEduc.v.7i2.0001

Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences. En M. Iori (Ed.), *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore*. Proceedings of International Conference, October 8, 2016 (pp. 213–220). Department of Mathematics, University of Bologna. Preface by Bruno D'Amore. Bologna (Italia): Pitagora. ISBN: 88-371-1927-5. Descarcable gratuitamente de: http://www.dm.unibo.it/rsddm, http://www.incontriconlamatematica.org, http://www.incontriconlamatematica.net.

Duval, R., & Saenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. [Prólogo de Bruno D'Amore. Comentarios a los artículos de Bruno D'Amore y de Carlos Eduardo Vasco Uribe]. Bogotá (Colombia): Universidad Distrital Francisco José de Caldas.